

खंड 1 (अधिकतम अंक: 12)

- इस खंड में चार (04) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प (A), (B), (C) और (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :
पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में।

- Q.1 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (inverse trigonometric functions) के केवल मुख्य मानों (principal values) को ध्यान में रखते हुए,

$$\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - 2\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

का मान है

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (A) $\frac{7}{24}$ | (B) $\frac{-7}{24}$ |
| (C) $\frac{-5}{24}$ | (D) $\frac{5}{24}$ |

- Q.2 माना कि $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, y^2 \leq 4x, y^2 \leq 12 - 2x \text{ और } 3y + \sqrt{8}x \leq 5\sqrt{8}\}$ है। यदि क्षेत्र (region) S का क्षेत्रफल $\alpha\sqrt{2}$ है, तब α बराबर है

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| (A) $\frac{17}{2}$ | (B) $\frac{17}{3}$ | (C) $\frac{17}{4}$ | (D) $\frac{17}{5}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

- Q.3 माना कि $k \in \mathbb{R}$ है। यदि $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(\sin kx) + \cos x + x)^{\frac{2}{x}} = e^6$, तब k का मान है

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 3 | (D) 4 |
|-------|-------|-------|-------|

Q.4 माना कि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक फलन (function) है, जो

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{यदि } x \neq 0, \\ 0, & \text{यदि } x = 0, \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा सत्य है?

- (A) अंतराल (interval) $\left[\frac{1}{10^{10}}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ के अनंत (infinitely many) हल (solutions) हैं।
- (B) अंतराल $\left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$ में $f(x) = 0$ का कोई हल (solution) नहीं है।
- (C) अंतराल $\left(0, \frac{1}{10^{10}}\right)$ में $f(x) = 0$ के हलों (solutions) का समुच्चय (set) परिमित (finite) है।
- (D) अंतराल $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\pi}\right)$ में $f(x) = 0$ के 25 से अधिक हल (solutions) हैं।

खंड 2 (अधिकतम अंक: 12)

- इस खंड में तीन (03) प्रश्न हैं |
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प (A), (B), (C) और (D) दिए गए हैं | इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं) |
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए |
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :
 - पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है |
 - आंशिक अंक : +3 यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है |
 - आंशिक अंक : +2 यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं |
 - आंशिक अंक : +1 यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प एक सही विकल्प है |
 - शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है) |
 - ऋण अंक : -2 अन्य सभी परिस्थितियों में |
- उदाहरण: यदि किसी प्रश्न के लिए केवल विकल्प (A), (B) और (D) सही विकल्प हैं ,तब
 - केवल विकल्प (A), (B) और (D) चुनने पर +4 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (A) और (B) चुनने पर +2 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (A) और (D) चुनने पर +2 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (B) और (D) चुनने पर +2 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (A) चुनने पर +1 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (B) चुनने पर +1 अंक मिलेंगे;
 - केवल विकल्प (D) चुनने पर +1 अंक मिलेंगे ;
 - कोई भी विकल्प ना चुनने पर (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित रहने पर) 0 अंक मिलेंगे; और
 - अन्य किसी विकल्पों के संयोजन को चुनने पर -2 अंक मिलेंगे |

Q.5 माना कि S उन सभी $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ का समुच्चय है कि

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)(\log_e x)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^{\alpha\beta} (\log_e(1+x))^\beta} = 0$$

है | तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) सही है (हैं)?

- (A) $(-1, 3) \in S$
- (B) $(-1, 1) \in S$
- (C) $(1, -1) \in S$
- (D) $(1, -2) \in S$

Q.6 बिंदु $P(1, 3, 2)$ से, रेखा $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{1}$ के समान्तर खींची गयी सरल रेखा (straight line), तल (plane) $L_1 : x - y + 3z = 6$ को बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित (intersect) करती है। एक अन्य सरल रेखा जो बिंदु Q से होकर जाती है और तल (plane) L_1 के लंबवत (perpendicular) है, तल (plane) $L_2 : 2x - y + z = -4$ को बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करती है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (हैं)?

- (A) रेखाखंड (line segment) PQ की लंबाई $\sqrt{6}$ है
 (B) R के निर्देशांक (coordinates) $(1, 6, 3)$ हैं
 (C) त्रिभुज (triangle) PQR का केन्द्रक (centroid) $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$ है
 (D) त्रिभुज PQR का परिमाप (perimeter) $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{11}$ है

Q.7 माना कि A_1, B_1, C_1 , xy -तल (xy -plane) में स्थित तीन बिंदु हैं। मान लीजिये कि रेखाएं A_1C_1 और B_1C_1 , वक्र (curve) $y^2 = 8x$ के लिए क्रमशः A_1 और B_1 पर स्पर्श रेखाएं (tangents) हैं। यदि $O = (0, 0)$ और $C_1 = (-4, 0)$, तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (हैं)?

- (A) रेखाखंड (line segment) OA_1 की लंबाई $4\sqrt{3}$ है
 (B) रेखाखंड A_1B_1 की लंबाई 16 है
 (C) त्रिभुज (triangle) $A_1B_1C_1$ का लंबकेंद्र (orthocenter) $(0, 0)$ है
 (D) त्रिभुज $A_1B_1C_1$ का लंबकेंद्र $(1, 0)$ है

खंड 3 (अधिकतम अंक: 24)

- इस खंड में **छह (06)** प्रश्न हैं |
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक **गैर-ऋणात्मक पूर्णांक (NON-NEGATIVE INTEGER)** है |
- प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर को दर्शाने वाले सही पूर्णांक को माउज़ (MOUSE) और ऑन स्क्रीन (ON-SCREEN) वर्चुअल नुमेरिक कीपैड (VIRTUAL NUMERIC KEYPAD) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिह्नित स्थान पर प्रविष्ट करें |
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :
 पूर्ण अंक : +4 यदि सिर्फ सही पूर्णांक (integer) ही प्रविष्ट किया गया है |
 शून्य अंक: 0 अन्य सभी परिस्थितियों में |

Q.8 माना कि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा फलन (function) है कि सभी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x+y) = f(x) + f(y)$ है, और $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ एक ऐसा फलन है कि सभी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $g(x+y) = g(x)g(y)$ है | यदि

$$f\left(\frac{-3}{5}\right) = 12 \text{ और } g\left(\frac{-1}{3}\right) = 2 \text{ हैं, तब } \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + g(-2) - 8\right)g(0) \text{ का मान } \underline{\hspace{2cm}} \text{ है।}$$

Q.9 एक थैले (bag) में N गेंदें (balls) हैं, जिनमें से 3 गेंदें सफेद हैं, 6 गेंदें हरी हैं, और शेष गेंदें नीली हैं | मान लीजिये कि इसके अलावा, गेंदें एक-रूप (identical) हैं | थैले में से तीन गेंदें यादृच्छया (randomly) एक के बाद एक, बिना प्रतिस्थापन (without replacement) के निकाली जाती हैं | मान लीजिये कि $i = 1, 2, 3$, के लिए, W_i, G_i , और B_i , i वें निकाल (i^{th} draw) में क्रमशः सफेद, हरी और नीली गेंदों के आने की घटनाओं को दर्शाते हैं | यदि प्रायिकता

$$(\text{probability}) P(W_1 \cap G_2 \cap B_3) = \frac{2}{5N} \text{ है और सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional probability)}$$

$$P(B_3 | W_1 \cap G_2) = \frac{2}{9} \text{ है, तब } N \text{ बराबर } \underline{\hspace{2cm}} \text{ है।}$$

Q.10 माना कि फलन (function) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin x \left(x^{2023} + 2024x + 2025\right)}{e^{\pi x} (x^2 - x + 3)} + \frac{2 \left(x^{2023} + 2024x + 2025\right)}{e^{\pi x} (x^2 - x + 3)}$$

द्वारा परिभाषित है | तब \mathbb{R} में, $f(x) = 0$ के हलों (solutions) की संख्या $\underline{\hspace{2cm}}$ है |

Q.11 माना कि $\vec{p} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हैं | यदि कुछ वास्तविक संख्याओं (real numbers) α, β , और γ के लिए,

$$15\hat{i} + 10\hat{j} + 6\hat{k} = \alpha(2\vec{p} + \vec{q}) + \beta(\vec{p} - 2\vec{q}) + \gamma(\vec{p} \times \vec{q})$$

है, तब γ का मान $\underline{\hspace{2cm}}$ है |

- Q.12 बिंदु $(0, -\alpha)$ से परवलय (parabola) $x^2 = -4ay$, जहाँ $a > 0$ है, के लिए $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ढाल (slope) का एक अभिलंब (normal) खींचा गया है। माना कि L , परवलय की नियता (directrix) के समान्तर, $(0, -\alpha)$ से होकर जाने वाली रेखा है। मान लीजिये कि L , परवलय को दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेदित (intersect) करती है। माना कि r , परवलय की नाभिलंब जीवा (latus rectum) की लंबाई को दर्शाता है और s , रेखाखंड (line segment) AB की लंबाई के वर्ग को दर्शाता है। यदि $r : s = 1 : 16$ है, तब $24a$ का मान _____ है।

- Q.13 माना कि फलन $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
- $$f(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1}2, & \text{यदि } t = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{(2n+1-t)}{2}f(2n-1) + \frac{(t-(2n-1))}{2}f(2n+1), & \text{यदि } 2n-1 < t < 2n+1, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x \in (1, \infty)$ से परिभाषित कीजिये। माना कि α , अंतराल $(1, 8]$ में समीकरण $g(x) = 0$ के हलों (solutions) की संख्या को दर्शाता है और $\beta = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x-1}$ है। तब $\alpha + \beta$ का मान _____ है।

खंड 4 (अधिकतम अंक: 12)

- इस खंड में **दो (02)** अनुच्छेद हैं |
- प्रत्येक अनुच्छेद पर आधारित **दो (02)** प्रश्न हैं |
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक **संख्यात्मक मान (NUMERICAL VALUE)** है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउज़ (MOUSE) और ऑन-स्क्रीन (ON-SCREEN) वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड (VIRTUAL NUMERIC KEYPAD) का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट करें।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो मान को **दो (02)** दशमलव स्थानों तक **समेटे/शून्यांत (TRUNCATE/ROUND-OFF)** करें |
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :
पूर्ण अंक : +3 यदि निर्दिष्ट स्थान पर केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है |
शून्य अंक : 0 अन्य सभी परिस्थितियों में |

PARAGRAPH “I”

माना कि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है, और X, S से S में उन सभी संबंधों (relations) R का समुच्चय (set) है जो निम्नलिखित दोनों गुणधर्मों (properties) को संतुष्ट करते हैं:

- R में ठीक (exactly) 6 अवयव (elements) हैं |
- प्रत्येक $(a, b) \in R$ के लिए $|a - b| \geq 2$ है |

माना कि $Y = \{R \in X : R \text{ के परिसर (range) में ठीक (exactly) एक अवयव (element) है}\}$

और $Z = \{R \in X : R, S \text{ से } S \text{ में एक फलन (function) है}\}$ |

माना कि $n(A)$, समुच्चय A में अवयवों की संख्या (number of elements) को दर्शाता है |

(PARAGRAPH “I” पर आधारित दो प्रश्न हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

Q.14 यदि $n(X) = {}^m C_6$ है, तब m का मान _____ है |

PARAGRAPH “I”

माना कि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है, और X, S से S में उन सभी संबंधों (relations) R का समुच्चय (set) है जो निम्नलिखित दोनों गुणधर्मों (properties) को संतुष्ट करते हैं:

- R में ठीक (exactly) 6 अवयव (elements) हैं |
- प्रत्येक $(a, b) \in R$ के लिए $|a - b| \geq 2$ है |

माना कि $Y = \{R \in X : R \text{ के परिसर (range) में ठीक (exactly) एक अवयव (element) है}\}$

और $Z = \{R \in X : R, S \text{ से } S \text{ में एक फलन (function) है}\}$ |

माना कि $n(A)$, समुच्चय A में अवयवों की संख्या (number of elements) को दर्शाता है |

(PARAGRAPH “I” पर आधारित दो प्रश्न हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

Q.15 यदि $n(Y) + n(Z)$ का मान k^2 है, तब $|k|$ _____ है।

PARAGRAPH "II"

माना कि $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ वह फलन (function) है जो $f(x) = \sin^2 x$ द्वारा परिभाषित है, और माना कि

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, \infty)$ वह फलन है जो $g(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2} - x^2}$ द्वारा परिभाषित है।

(PARAGRAPH "II" पर आधारित दो प्रश्न हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

Q.16 $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ का मान _____ है।

PARAGRAPH "II"

माना कि $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ वह फलन (function) है जो $f(x) = \sin^2 x$ द्वारा परिभाषित है, और माना कि

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, \infty)$ वह फलन है जो $g(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2} - x^2}$ द्वारा परिभाषित है।

(PARAGRAPH "II" पर आधारित दो प्रश्न हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

Q.17 $\frac{16}{\pi^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx$ का मान _____ है।

END OF THE QUESTION PAPER